Sinüs ve Kosinüs Teoremleri

Üçgende yükseklik ve dik üçgende trigonometrik oranlardan yararlanarak sinüs teoremini doğrular ve uygular. · Pisagor teoremi ve trigonometrik özdeşlikleri kullanarak kosinüs teoremini ispatlar. · Kenar ve açı elemanları verilen üçgenlerde uygun teoremi seçerek uzunluk, açı ve alan problemlerini çözer.

HATIRLAYALIM

- Sinüs Teoremi: Bir ABC üçgeninde çevrel çember yarıçapı R olmak üzere $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ eşitliği geçerlidir.
- Kosinüs Teoremi: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$ bağıntısı ile iki kenar ve aradaki açıdan üçüncü kenar bulunur.
- Bütünler iki açının ($\alpha + \beta = 180°$) sinüsleri birbirine eşit ($\sin(180°-\alpha) = \sin \alpha$), kosinüsleri zıt işaretlidir ($\cos(180°-\alpha) = -\cos \alpha$).

1 EŞLEŞTİRME

Üçgenlerde trigonometrik teorem ve özdeşlikleri matematiksel ifadeleriyle eşleştiriniz.

SİNÜS VE KOSİNÜS TEOREMLERİ ÖZETİ

Sinüs Teoremi	Kosinüs Teoremi	Pisagor Özel Hâli	Bütünler Açılar
$a/\sin A = b/\sin B = 2R$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	$A = 90° \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$	$\cos(180°-\alpha) = -\cos \alpha$

c 1. Sinüs Teoremi
a 2. Kosinüs Teoremi
d 3. Bütünler Açılarda Sinüs
b 4. Bütünler Açılarda Kosinüs

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$
b) $\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$
c) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
d) $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$

2 DOĞRU MU, YANLIŞ MI?

Sinüs ve kosinüs teoremleriyle ilgili ifadeleri Doğru/Yanlış olarak belirleyiniz.

HANGİ DURUMDA HANGİ TEOREM SEÇİLİR?

İki Açı + Bir Kenar	İki Kenar + Aradaki Açı	Üç Kenar Uzunluğu
AÇK verilen üçgenler	KAK verilen üçgenler	KKK verilen üçgenler
Sinüs Teoremi uygulanır	Kosinüs Teoremi uygulanır	Kosinüs ile açı bulunur

	D	Y
Üç kenar uzunluğu bilinen bir üçgenin iç açıları kosinüs teoremi yardımıyla bulunabilir.	☑	☐
Geniş açılı bir üçgende geniş açının kosinüs değeri pozitif (+) işaretlidir.	☐	☑
Sinüs teoremindeki $\frac{a}{\sin A}$ oranı çevrel çemberin çapına (2R) eşittir.	☑	☐
$\cos 120°$ değeri $\cos 60°$ değerine yani $+\frac{1}{2}$'ye eşittir.	☐	☑

3 ÇOKTAN SEÇMELİ

Bir ABC üçgeninde b = 5 cm, c = 8 cm ve m(A) = 60° olduğuna göre a kenarı kaç cm'dir? ($\cos 60° = \frac{1}{2}$)

KOSİNÜS TEOREMİ İLE KENAR HESABI

Verilen Elemanlar (KAK)	Bağıntıda Yerine Koyma
b = 5 cm, c = 8 cm, m(A) = 60°	$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot (1/2)$
$\cos 60° = 1/2$	$a^2 = 25 + 64 - 40 = 49 \Rightarrow a = 7$ cm

A) 7 B) 6 C) 9 D) $\sqrt{39}$

4 KISA CEVAP

Kosinüs teoremi bağıntısı ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$), A açısı 90° olduğunda neden Pisagor teoremine dönüşür?

KOSİNÜS TEOREMİNDEN PİSAGOR'A GEÇİŞ

Genel Kosinüs Bağıntısı	A = 90° (Dik Üçgen) Durumu
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos A$	$\cos 90° = 0$ olduğundan çarpım sıfırlanır
Dar açıda $\cos A > 0$, genişte $\cos A < 0$	Doğrudan $a^2 = b^2 + c^2$ elde edilir

$\cos 90° = 0$ olduğu için $-2\cdot b\cdot c\cdot\cos 90°$ terimi sıfırlanır ve eşitlik doğrudan $a^2 = b^2 + c^2$ Pisagor bağıntısına dönüşür.

5 ÇOKTAN SEÇMELİ

Bir ABC üçgeninde m(A) = 30°, m(B) = 45° ve a = 6 cm ise b kenarı kaç cm'dir? ($\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

SİNÜS TEOREMİ UYGULAMASI

Verilenler (İki Açı ve Bir Kenar)	Oran Eşitliği (a / sin A = b / sin B)
m(A) = 30° ($\sin 30° = 1/2$)	$6 / (1/2) = b / (\sqrt{2}/2)$
m(B) = 45° ($\sin 45° = \sqrt{2}/2$), a = 6 cm	$12 = 2b / \sqrt{2} \Rightarrow b = 6\sqrt{2}$ cm

A) 6 B) $6\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 12

6 TABLOYU TAMAMLA

Elemanları verilen ABC üçgenlerinde kullanılacak teoremi ve aranan uzunluğu bularak tabloyu tamamlayınız.

Verilen Elemanlar	Uygun Teorem	Hesaplanan Değer
b = 3, c = 4, m(A) = 90°	Pisagor / Kosinüs	a = 5 cm
a = 6, m(A) = 30°, m(B) = 45°	Sinüs Teoremi	b = $6\sqrt{2}$ cm
b = 4, c = 6, m(A) = 60°	Kosinüs Teoremi	a = $2\sqrt{7}$ cm
a = 8, m(A) = 30°	Sinüs Teoremi (a/sinA = 2R)	Çevrel yarıçap R = 8 cm

7 BOŞLUK DOLDURMA

Cümlelerdeki boşlukları uygun matematik kavramlarıyla tamamlayınız.

kosinüs | sinüs | çevrel | içteğet

1. İki kenar uzunluğu ve aralarındaki açı biliniyorsa üçüncü kenar **kosinüs** teoremi ile bulunur.
2. Üçgenin üç köşesinden geçen çembere **çevrel** çember adı verilir.
3. Birbirini 180°'ye tamamlayan bütünler iki açının **sinüs** değerleri birbirine eşittir.

8 ÇOKTAN SEÇMELİ

ABC üçgeninde a = 10 cm ve sin A = $\frac{5}{8}$ olduğuna göre çevrel çemberin yarıçapı (R) kaç cm'dir?

Ⓐ 4 Ⓑ 6 **Ⓒ 8** Ⓓ 16

9 ŞİFRELİ KELİME

İpuçlarından yararlanarak kavramları yazınız ve doğruluğu ispatlanabilen matematiksel önerme anlamına gelen şifreyi bulunuz.

Üçgenlerde açı ve kenar bağıntılarını inceleyen matematik dalı — T R İ G O N O M E T R İ

Üçgenin köşelerinden geçen çemberin adı (..... çember) — Ç E V R E L

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$ bağıntısına adını veren trigonometrik fonksiyon — K O S İ N Ü S

Sinüs teoreminde R harfi ile gösterilen çember elemanı — Y A R I Ç A P

Üçgende a, b, c harfleriyle gösterilen doğru parçalarından her biri — K E N A R

Sinüs teoremini doğrulamak için köşeden tabana indirilen yükseklik — D İ K M E

Turuncu kutulardaki harfler yukarıdan aşağıya:

TEOREM

10 SIRALAMA

Bir ABC üçgeninde A köşesinden indirilen h yüksekliği yardımıyla Sinüs Teoremini doğrulama adımlarını sıralayınız.

SİNÜS TEOREMİNİN İSPAT BASAMAKLARI

1. Dikme İndirme	2. Sol Dik Üçgen	3. Sağ Dik Üçgen	4. Eşitleme
A'dan [BC]'ye h çizilir	sin B = h/c -> h = c·sin B	sin C = h/b -> h = b·sin C	b / sin B = c / sin C

[2] Oluşan ABH dik üçgeninde sin B = $\frac{h}{c}$ oranından h = c · sin B eşitliğini yazma

[1] ABC üçgeninde A köşesinden [BC] kenarına dik [AH] = h yüksekliğini indirme

[4] İki h ifadesini birbirine eşitleyip (c · sin B = b · sin C) $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ bağıntısını elde etme

[3] Oluşan ACH dik üçgeninde sin C = $\frac{h}{b}$ oranından h = b · sin C eşitliğini yazma

11 EŞLEŞTİRME

Özel açıların ve bütünler açıların trigonometrik değerlerini karşılıklarıyla eşleştiriniz.

BÜTÜNLER VE ÖZEL AÇI DEĞERLERİ

sin 30° = sin 150°	cos 60° = 1 / 2	sin 45° = sin 135°	sin 60° = sin 120°
Değeri: 1 / 2	cos 120° = -1 / 2	Değeri: √2 / 2	Değeri: √3 / 2

[c] 1. sin 30° ve sin 150° — a) $\frac{1}{2}$

[a] 2. cos 60° — b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[d] 3. cos 120° — c) $\frac{1}{2}$

[b] 4. sin 60° ve sin 120° — d) $-\frac{1}{2}$

12 AÇIK UÇLU · DÜŞÜN

Kenar uzunlukları a = 7 cm, b = 3 cm ve c = 5 cm olan bir ABC üçgeninde A açısının ölçüsü kaç derecedir?

ÜÇ KENARI BİLİNEN ÜÇGENDE AÇI BULMA

Kenarlar: a = 7, b = 3, c = 5	Açı Hesabı
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos A$	49 = 34 - 30·cos A -> 30·cos A = -15
49 = 9 + 25 - 2 · 3 · 5 · cos A	cos A = -1/2 -> m(A) = 120°

$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot3\cdot5\cdot\cos A \rightarrow 49 = 34 - 30\cdot\cos A \rightarrow \cos A = -\frac{1}{2}$

olduğundan m(A) = 120° bulunur.