Üstel ve Logaritmik Denklemler ile Eşitsizlikler (12.1.3.1)

Üstel denklemlerin çözüm kümelerini taban eşitleme, logaritma alma ve değişken değiştirme yöntemleriyle bulur. · Logaritmik denklemlerin çözüm kümelerini logaritma özelliklerini ve tanım kümesi koşullarını dikkate alarak belirler. · Üstel ve logaritmik eşitsizliklerin çözüm kümelerini tabanın 1'den büyük veya 0 ile 1 arasında olma durumuna göre analitik olarak çözer.

HATIRLAYALIM

- $a^x = b$ denkleminde $a > 0$ ve $a \neq 1$ iken $x = \log_a b$ şeklinde çözülür; tabanlar eşitlenebiliyorsa $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ olur.
- $\log_a f(x) = b$ denkleminde $f(x) = a^b$ bulunur; bulunan kök mutlaka tanım aralığını ($f(x) > 0$) sağlamalıdır.
- $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ eşitsizliğinde: $a > 1$ ise yön korunur ($0 < f(x) < g(x)$), $0 < a < 1$ ise yön değişir ($f(x) > g(x) > 0$).

1 EŞLEŞTİRME

Görseldeki üstel ve logaritmik denklemleri en uygun çözüm yöntemiyle eşleştiriniz.



d 1. $2^{x+1} = 16$

c 2. $3^x = 5$

b 3. $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

a 4. $\log_2(x - 1) = 3$

a) Üstel forma dönüştürerek $x - 1 = 2^3$ bağıntısından köke ulaşma

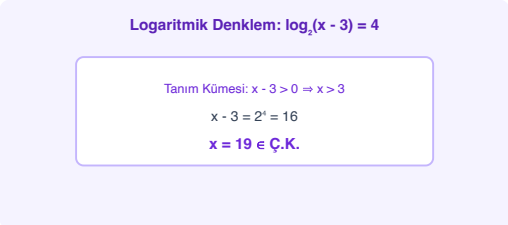
b) $t = 2^x$ değişken dönüşümü uygulayarak ikinci dereceden denklem kurma

c) Her iki tarafın 3 tabanına göre logaritmasını alarak $x = \log_3 5$ yazma

d) Her iki tarafı 2 tabanında yazarak üsleri birbirine eşitleme yöntemi

2 KISA CEVAP

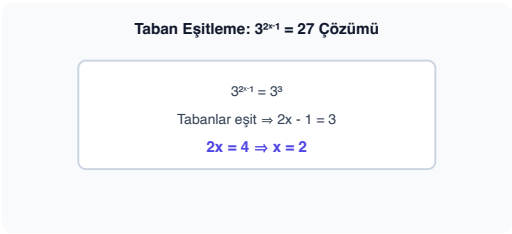
$\log_2(x - 3) = 4$ denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.



{19}

3 ÇOKTAN SEÇMELİ

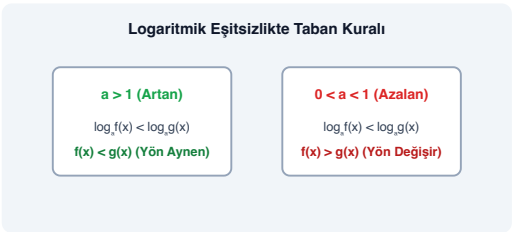
$3^{2x-1} = 27$ üstel denklemini sağlayan x reel sayısı kaçtır?



A) 2 B) 1 C) 3 D) 4

4 DOĞRU MU, YANLIŞ MI?

Logaritmik denklem ve eşitsizlikler hakkındaki ifadeleri Doğru (D) veya Yanlış (Y) olarak işaretleyiniz.



	D	Y
Logaritmik denklemlerde bulunan kökler logaritması alınan ifadeyi daima pozitif yapmalıdır.	☑	☐
$0 < a < 1$ tabanlı logaritmik eşitsizliklerde eşitsizlik yönü aynı kalır.	☐	☑
$a > 1$ durumunda $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ eşitsizliği $0 < f(x) < g(x)$ şeklinde çözülür.	☑	☐
Üstel fonksiyonların görüntü kümesi tüm reel sayılar kümesidir.	☐	☑

5 KISA CEVAP

$4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ denkleminde $t = 2^x$ dönüşümü yapıldığında denklemi sağlayan x gerçel kökü kaçtır?

2

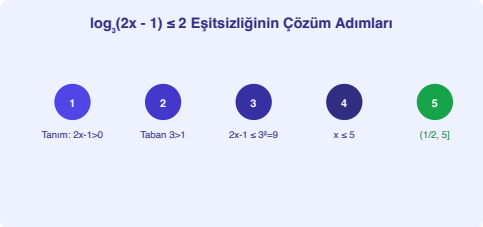
6 TABLOYU TAMAMLA

Üstel ve logaritmik eşitsizlik kurallarını tablodaki boşluklara uygun şekilde tamamlayınız.

Eşitsizlik Biçimi	Taban Aralığı	Dönüşen Eşitsizlik
$\log_a f(x) \le \log_a g(x)$	$a > 1$	$0 < f(x) \le g(x)$
$\log_a f(x) \le \log_a g(x)$	$0 < a < 1$	$f(x) \ge g(x) > 0$
$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$a > 1$	$f(x) < g(x)$
$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$0 < a < 1$	$f(x) > g(x)$

7 SIRALAMA

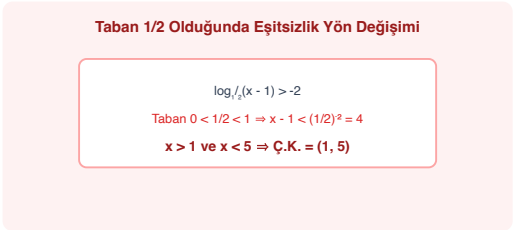
$\log_3(2x - 1) \le 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulma adımlarını mantıksal sıraya diziniz.



1. Tanım kümesi gereği $2x - 1 > 0$ yani $x > 1/2$ koşulunu belirleme
4. $2x \le 10$ bağıntısından $x \le 5$ sonucunu elde etme
3. $2x - 1 \le 3^2$ bağıntısından $2x - 1 \le 9$ eşitsizliğini yazma
2. Taban $3 > 1$ olduğundan eşitsizlik yönünü koruyarak açma
5. Tanım aralığı ile kesiştirerek Ç.K. = (1/2, 5] kümesini oluşturma

8 ÇOKTAN SEÇMELİ

$\log_{1/2}(x - 1) > -2$ eşitsizliğinin gerçel sayılardaki en geniş çözüm aralığı hangisidir?



A) (1, 5) B) (1, 4) C) (2, 5) D) (0, 5)

9 AÇIK UÇLU · DÜŞÜN

$0 < a < 1$ durumunda $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ eşitsizliği çözülürken eşitsizlik yönünün değişme nedenini açıklayınız.

Taban 1'den küçük olduğunda logaritma fonksiyonu.

10 EŞLEŞTİRME

Görseldeki logaritmik ifadeleri sayısal değerleriyle eşleştiriniz.



b 1. $\log_2(32)$	a) -2
a 2. $\log_3(1/9)$	b) 5
d 3. $\ln(e^3)$	c) 0
c 4. $\log_5(1)$	d) 3

11 DOĞRU MU, YANLIŞ MI?

Üstel ve logaritmik denklemlerin çözüm kümeleriyle ilgili yargıları Doğru (D) ya da Yanlış (Y) olarak değerlendiriniz.

	D	Y
$e^x = -3$ denkleminin gerçel sayılar kümesindeki çözüm kümesi boş kümedir.	☑	☐
$\log(x^2) = 2$ denkleminin gerçel sayılarda iki farklı kökü vardır ($x = 10$ ve $x = -10$).	☑	☐
$\ln(x) = 0$ denkleminin kökü $x = 0$ sayısıdır.	☐	☑
$\log_a x$ fonksiyonunun grafiği x eksenini daima (1, 0) noktasında keser.	☑	☐

12 ŞİFRELİ KELİME

Görseldeki matematiksel ipuçlarından yararlanarak bulmacayı çözünüz. Anahtar kutulardaki harflerle şifrelenmiş üstel ve logaritma kavramını bulunuz.



Bir eğriye yalnızca tek bir noktada temas eden doğru — T E Ğ E T

Eğrinin sonsuzda yaklaştığı ancak asla kesmediği sınır doğru — A S İ M P T O T

İki kümenin elemanları arasındaki kurala dayalı ilişki — B A Ğ I N T I

İki reel sayı arasındaki tüm değerleri kapsayan alt küme — A R A L I K

Geometride boyutu olmayan en temel konum birimi — N O K T A

Turuncu kutulardaki harfler yukarıdan aşağıya:

TABAN