Sayı Kümeleri ve İşlem Özellikleri

Doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar ve gerçek sayılar kümelerinin temel özelliklerine (sıralama, arada olma ve işlem özellikleri) ilişkin varsayımlarda bulunur. · Farklı sayı kümelerinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin kapalılık, değişme, birleşme, etkisiz eleman, ters eleman ve dağılma özelliklerini inceler. · Sayı kümelerinde elde ettiği örüntülerden genellemeler yapar ve varsayımların doğruluğunu cebirsel muhakeme veya karşı örnek yardımıyla değerlendirir.

HATIRLAYALIM

- Alt küme ilişkisi: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ve $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$.
- Gerçek sayılarda toplamada birim eleman 0, ters eleman -a; çarpmada birim eleman 1, yutan eleman 0, ters eleman $\frac{1}{a}$'dır.
- $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinde iki farklı sayı arasında sonsuz sayı bulunur (yoğunluk / arada olma özelliği).

1 EŞLEŞTİRME

Gerçek sayılar kümesindeki cebirsel eşitlikleri işlem özellikleriyle eşleştiriniz.

Değişme	Birim Eleman	Ters Eleman	Dağılma
a+b = b+a · a·b = b·a	Toplama: 0 · Çarpma: 1	Toplama: -a · Çarpma: 1/a	a·(b+c) = a·b + a·c

d 1. a + (-a) = 0

b 2. a · (b + c) = a · b + a · c

a 3. (a + b) + c = a + (b + c)

c 4. a · 1 = 1 · a = a

a) Toplama işleminde birleşme özelliği
b) Çarpmanın toplama üzerine soldan dağılma özelliği
c) Çarpma işleminde etkisiz (birim) eleman özelliği
d) Toplama işlemine göre ters eleman özelliği

2 KISA CEVAP

Gerçek sayılarda $x = -\frac{3}{5}$ sayısının toplamaya göre tersi A, çarpmaya göre tersi B ise A · B ve A + B kaçtır?

GERÇEK SAYILARDA TERS ELEMAN UYGULAMASI

x = -3/5 sayısının toplama tersi A = +3/5 | Çarpma tersi B = -5/3

Her a ≠ 0 gerçek sayısı için toplamaya göre tersiyle çarpmaya göre tersi çarpımı -1'dir

$A = \frac{3}{5}$ ve $B = -\frac{5}{3}$ olup $A \cdot B = -1$ ve $A + B = \frac{3}{5} - \frac{5}{3} = -\frac{16}{15}$ bulunur.

3 ŞİFRELİ KELİME

İpuçlarına karşılık gelen kavramları yazarak anahtar kelimeyi bulunuz.

Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşimiyle oluşan küme, gerçek (4 harf) — R E E L

Toplamada 0, çarpmada 1 olan etkisiz eleman (5 harf) — B İ R İ M

a + (-a) = 0 eşitliğindeki (-a) elemanının adı (4 harf) — T E R S

İki sayı arasında sonsuz sayı bulunması özelliği, yoğun (5 harf) — Y O Ğ U N

Turuncu kutulardaki harfler yukarıdan aşağıya:

RBTY

4 ÇOKTAN SEÇMELİ

Görseldeki kapalılık tablosuna göre sayı kümelerinin dört işleme göre kapalılık özelliğiyle ilgili hangisi yanlıştır?

SAYI KÜMELERİNDE DÖRT İŞLEME GÖRE KAPALILIK ÖZELLİĞİ

ℕ: (+, ·) Kapalı | ℤ: (+, -, ·) Kapalı | ℚ ve ℝ: (+, -, · ve ÷[≠0]) Kapalı

Dikkat: İrrasyonel sayılar kümesi (ℚ') dört işlemin hiçbirine göre kapalı değildir!

A) İrrasyonel sayılar kümesi (ℚ') toplama ve çarpmaya göre kapalıdır
B) Doğal sayılar kümesi (ℕ) toplama ve çarpmaya göre kapalıdır
C) Tam sayılar kümesi (ℤ) çıkarma işlemine göre kapalıdır
D) Gerçek sayılar kümesi (ℝ) toplamaya ve çarpmaya göre kapalıdır

5 DOĞRU MU, YANLIŞ MI?

Sayı kümeleri ve işlem özellikleriyle ilgili ifadelerden doğru olanlara D, yanlış olanlara Y yazınız.

Doğal (ℕ)	Tam (ℤ)	Rasyonel (ℚ)	Gerçek (ℝ)
{0, 1, 2, ...}	{..., -1, 0, 1, ...}	a/b (b ≠ 0)	ℚ ∪ ℚ' birleşimi

	D	Y
Gerçek sayılar kümesinde 0 sayısının çarpma işlemine göre tersi yoktur.	✓	
Doğal sayılar kümesi (ℕ) çıkarma işlemine göre kapalı bir kümedir.		✓
Bir rasyonel sayı ile bir irrasyonel sayının toplamı daima irrasyoneldir.	✓	
Tam sayılar kümesinde (ℤ) ardışık iki tam sayı arasında sonsuz tam sayı vardır.		✓

6 AÇIK UÇLU · DÜŞÜN

"Bir rasyonel sayı ile bir irrasyonel sayının çarpımı her zaman irrasyoneldir." iddiasını çürüten karşı örneği yazınız.

Rasyonel sayı $0 \in \mathbb{Q}$ ve irrasyonel sayı $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}'$ seçildiğinde $0 \cdot \sqrt{5} = 0 \in \mathbb{Q}$ (rasyonel) olur; iddia a = 0 için yanlıştır.

7 TABLOYU TAMAMLA

Verilen gerçek sayıları ait oldukları en dar sayı kümesi ve rasyonel/irrasyonel olma durumuna göre tamamlayınız.

Verilen Sayı	Değeri / Özelliği	Ait Olduğu Küme Grubu
$\sqrt{36}$	6 (Tam kare kök)	Doğal ($\mathbb{N}$), Tam ($\mathbb{Z}$) ve Rasyonel ($\mathbb{Q}$)
-9	Negatif tam değer	Tam ($\mathbb{Z}$), Rasyonel ($\mathbb{Q}$) ve Gerçek ($\mathbb{R}$)
$\frac{7}{12}$	İki tam sayının oranı	Rasyonel ($\mathbb{Q}$) ve Gerçek ($\mathbb{R}$)
$\sqrt{15}$	Kök dışına tam çıkamaz	İrrasyonel ($\mathbb{Q}'$) ve Gerçek ($\mathbb{R}$)

8 ÇOKTAN SEÇMELİ

Görseldeki yoğunluk (arada olma) şemasına göre rasyonel ($\mathbb{Q}$) ve gerçek ($\mathbb{R}$) sayılarla ilgili hangisi her zaman doğrudur?

ARADA OLMA (YOĞUNLUK) ÖZELLİĞİ · $\mathbb{Q}$ VE $\mathbb{R}$ KÜMELERİ

Her $a < b$ için $a < (a + b) / 2 < b$ aritmetik ortalaması aradadır.

İki farklı rasyonel veya gerçek sayı arasında sonsuz rasyonel ve irrasyonel sayı vardır.

A) İki farklı rasyonel sayı arasında sonsuz rasyonel sayı vardır

B) Rasyonel ve irrasyonel sayıların kesişimi gerçek sayıları verir

C) Her gerçek sayının çarpmaya göre tersi bir tam sayıdır

D) İki irrasyonel sayının çarpımı her zaman irrasyonel sayıdır

9 EŞLEŞTİRME

Sayı kümelerini yapısal tanımlarıyla eşleştiriniz.

$\mathbb{N}$ Kümesi	$\mathbb{Z}$ Kümesi	$\mathbb{Q}$ Kümesi	$\mathbb{Q}'$ Kümesi
En küçük eleman 0	Çıkarmaya kapalı	Oranlı ve devirli	π, e, kök dışına çıkmaz

c 1. Doğal Sayılar ($\mathbb{N}$)

d 2. Tam Sayılar ($\mathbb{Z}$)

a 3. Rasyonel Sayılar ($\mathbb{Q}$)

b 4. İrrasyonel Sayılar ($\mathbb{Q}'$)

a) $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ için $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabilen sayılar

b) π, e, $\sqrt{3}$ gibi iki tam sayının oranı şeklinde yazılamayan sayılar

c) {0, 1, 2, 3, ...} kümesi; en küçük elemanı 0'dır

d) {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} kümesi; çıkarmaya göre kapalıdır

10 SIRALAMA

Görseldeki sayı kümelerinde matematiksel muhakeme ve genelleme adımlarını sıraya diziniz.

1. Örüntü — İşlemleri incele
2. Varsayım — Hipotez/iddia kur
3. Sınama — İspat / karşı örnek
4. Genelleme — Kuralı kesinleştir

4 Doğrulanan varsayımı gerekli koşullarıyla genel kural olarak yazma

1 Sayı kümelerindeki işlem örüntülerini inceleyerek örnekler oluşturma

3 Varsayımı cebirsel ispatla veya karşı örnek arayarak test etme

2 Örüntüden hareketle matematiksel bir varsayım (iddia) kurma

11 BOŞLUK DOLDURMA

Cümlelerdeki boşlukları kutudaki matematiksel kavramlarla tamamlayınız.

MATEMATİKSEL MUHAKEME KAVRAMLARI

Yoğunluk (Arada Olma) · Yutan Eleman (Çarpmada 0) · Karşı Örnek

Genellemenin yanlışlığını göstermek için tek bir karşı örnek (aksi örnek) yeterlidir.

karşı | yutan | yoğunluk | birim

1. İki gerçek sayı arasında sonsuz gerçek sayı bulunmasına ___yoğunluk___ özelliği denir.
2. Gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin ___yutan___ elemanı 0'dır.
3. Bir iddianın yanlışlığını kanıtlayan tek bir geçersizlik örneğine ___karşı___ örnek denir.

12 DOĞRU MU, YANLIŞ MI?

Ters eleman ve sıralama özellikleriyle ilgili ifadelerden doğru olanlara D, yanlış olanlara Y yazınız.

	D	Y
Tam sayılar kümesinde ($\mathbb{Z}$) çarpmaya göre tersi yine tam sayı olan yalnız 1 ve -1 vardır.	☑	☐
Bir eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir sayıyla çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirir.	☑	☐
Devirli ondalık gösterimler (0,333... gibi) irrasyonel sayıdır.	☐	☑
Sıfırdan farklı bir rasyonel sayı ile bir irrasyonel sayının çarpımı daima irrasyoneldir.	☑	☐